数理解析研究所講究録
1025 巻 1998 年 20-34

Existence of Positive Solutions for Semilinear Elliptic Problems involving Critical Sobolev Exponent in Unbounded Domains

Michinori ISHIWATA (石渡 通徳)
Department of Applied Physics,
School of Science and Engineering,
Waseda University

1 Introduction

$N \geq 4,\ \Omega \subset \mathbb{R}^N$ を必ずしも有界でない滑らかな領域とし、$2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ を、Sobolev の埋蔵 $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ の臨界指数とする。

この小論では、次の半線型楕円型微分方程式の正値解の存在について議論する：

$$\text{(BN)} \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u|u|^{2^*-2} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

主結果は次の定理である：

Theorem 1.1 (Main Theorem)
$N \geq 4$、d を $N \geq d \geq 1$ なる整数とし、$\Omega_d \subset \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の有界領域、$\Omega = \Omega_d \times \mathbb{R}^{n-d} \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ 内の柱状領域とする。

また $\lambda_1 = \inf\limits_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \dfrac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2}$ を、Poincaré の不等式の最良定数とする。

このとき、$0 < \lambda < \lambda_1$ ならば、(BN) は正値解を持つ。 □

(BN) に対して、次の変分法によるアプローチをとる。すなわち方程式 (BN) の正値解は、

$M = \{u \in H_0^1(\Omega) |\ \|u\|_{2^*} = 1\}$ 上の汎関数 $I_\lambda(u) = \displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda u\right) dx$ の minimizer

に対応することが Lagrange の未定乗数法からわかるので、以下この minimizer の存在問題 (VP) を考えることとする。

1.1 問題の背景

このタイプの方程式は、つぎのような分野に現れる [5, 6]：

- 非線型クライン-ゴルドン方程式の standing wave solution, traveling wave solution の取り扱い
- 非線型シュレーディンガー方程式の standing wave solution の取り扱い
- 非線型熱方程式の平衡解の取り扱い
- 自己相互作用をする非線型スカラー場の定常状態の取り扱い

以上のような応用分野からの興味のみならず、方程式 (BN) は数学的にも極めて豊富な構造をもつことから、近年多くの研究がなされてきた [7, 8, 9]。

我々は特に、方程式 (BN) が持つ noncompact variational problem としての側面に興味がある。この側面について以下で説明する。

いま X を適当な関数空間、$J \in C^1(X)$ とする。従来扱われてきた変分問題（J の X 上の critical point を探す問題）では、汎関数 J が次の条件をアプリオリに満たす場合が多かった。

Palais-Smale 条件

$(u_n) \subset X$ を $J(u_n) \to c \neq \pm\infty$, $(dJ)_{u_n} \to 0$ をみたす任意の列とする（Palais-Smale 列という）と、(u_n) は常に X での強収束部分列を持つ。 □

この場合には、J の critical point を見つけるためには、Palais-Smale 列を構成しさえすれば十分である。実際、Palais-Smale 列の強収束部分列の極限が critical point になることは、dJ の連続性より明らかである。Palais-Smale 列の構成のために、minimizing method, min-max method などが開発され、発展してきた [21]。

しかし、Palais-Smale 条件を満たさない汎関数も多く存在する。特に、物理学や幾何学において興味のある多くの汎関数は、物理的、幾何学的要請から、ゲージ不変性や共形不変性など、非コンパクトな群作用のもとでの不変性を自然に持っている。2 節で見るように、この場合汎関数は一般に Palais-Smale 条件を満たさない。

したがって、Palais-Smale 条件を満たさない汎関数に対する変分問題の中でも、特に汎関数が非コンパクト群作用のもとでの不変性を持つために Palais-Smale 条件が破れる問題は、重要である。

特に、このような汎関数に対する Palais-Smale 列は多くの場合、X で有界である。よって、有界だが強収束部分列を持たない Palais-Smale 列が存在することになる。ところで有限次元空間であれば、有界列は必ず収束部分列を持つので、上の現象は無限次元空間上の変分法に特有の現象である。

すなわち、非コンパクトな群作用のもとでの不変性を持つ汎関数に対する変分問題では、Palais-Smale 条件が、無限次元特有の現象により破れる場合がある。この現象は bubbling phenomena と呼ばれる。

物理学、幾何学において興味のある変分問題の多くで bubbling phenomena が見られることは、良く知られている [7, 8]（例えば 2 次元での harmonic map の存在問題、4 次元での Yang-Mills 方程式の解の存在問題、constant mean curvature を持つ曲面の存在問題など)。

我々の方程式 (BN) に対応する変分問題においても、bubbling phenomena が起こり得る。これが、上に述べた noncompact variational problem としての側面である。

1.2　本論の構成

以上のように汎関数 I_λ は Palais-Smale 条件を満たさないので、主定理の証明は Palais-Smale 条件を満たす変分問題とは異なり次の 2 ステップからなる：

Step 1. Palais-Smale 列の構成。

Step 2. Step 1 で作った特定の Palais-Smale 列のコンパクト性の証明。

Step 2 がうまく行くためには、Step 1 で特に強収束しそうな Palais-Smale 列を構成することが重要である。このためには Palais-Smale 列のコンパクト性がどのような形で崩れるのかを詳しく解析する必要がある。

以上の諸点を本論では議論する。

2 節では、汎関数の非コンパクト群作用のもとでの不変性が、Palais-Smale 列のコンパクト性にどのように影響するかを見る。ここで、Step 1 においてどのような列を構成すればよいかが定性的にはわかる。

3 節では、現在までの結果を概観する。

4 節では、Palais-Smale 列のコンパクト性がどのように崩れるかを、定量的に記述する。この方法としてここでは concentration-conpactness principle [16, 17, 18, 19] を用いる。特に領域の非有界性と、非線形項の増大度が critical であることを考慮し、最近開発された concentration-compactness principle at infinity [11, 4] を用いて解析を行なう。

5 節では、主定理の証明の概略を与える。

2　Bubbling Phenomena

汎関数 I_λ の Palais-Smale 条件の破れの様子をみるために、次の問題 (limitting problem) を導入する：

$$
\text{(L)}\quad \begin{cases} -\Delta u = u|u|^{2^*-2} & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u > 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}
$$

(L) の解は、

$M_\infty = \{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \mid \|u\|_{2^*} = 1\}$ 上の汎関数 $I_\infty(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$ の minimizer に対応するので、以下この minimizer の存在問題 $(\mathrm{VP})_\infty$ を考える。

(L) を導入するのは次の理由による。

一般に、$I_\lambda(u)$, $I_\infty(u)$ ともに Palais-Smale 条件を満たすとは限らない。また、以下で見るように、I_∞ は $\mathbb{R}^N$ 上の dilation-translation からなる群作用のもとで完全に不変であるが、I_λ は完全には不変でない。

この対称性を反映して、$I_\infty(u)$ の Palais-Smale 条件の破れ方は、きれいな形で解析できることが知られている [3]。

一方 $I_\lambda(u)$ での dilation-translation に関する対称性は、次の二つの理由により部分的に破れている：

- $I_\lambda(u)$ では lower term λu があること。
- $I_\lambda(u)$ では領域が $\mathbb{R}^n$ 全体でないこと。

ここでは $I_\lambda(u)$ の Palais-Smale 条件の破れを、$I_\infty(u)$ のきれいな形の破れが上記の原因で perturb したものと捉えるため、(L) を導入する。

2.1 Limitting Problem

$u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ に対し次の変換を考える：

$$\hat{u}_{\epsilon,y} = \frac{1}{(\epsilon)^{\frac{N-2}{2}}}\, u(\frac{x-y}{\epsilon})$$

すると H_0^1-norm, L^{2^*}-norm は、上の変換により不変である。特に L^p-norm が上のような dilation により不変になるのは $p = 2^*$ のときに限ることは、簡単な計算により示せる。この不変性と、領域が $\mathbb{R}^N$ 全体であることから容易に次が示せる：

Proposition 2.1 *($I_\infty(u)$ の dilation-translation invariance)*
$I_\infty(\hat{u}_{\epsilon,x}) = I_\infty(u)$. □

Proposition 2.1 を使うと、Palais-Smale 列でない minimizing sequence を次のように作ることができる：

$w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ を $I_\infty(u)$ の minimizer とする（このような minimizer の存在はよく知られた事実である [23, 18]）。

1. **Effect of dilation:**

   $\epsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$ となる任意の $(\epsilon_n) \subset \mathbb{R}_+$ をとる。すると $(\hat{w}_{\epsilon_n,0})$ は $I_\infty(u)$ の minimizing sequence であるが、$n \to \infty$ に従い $(\hat{w}_{\epsilon_n,0})$ は原点を中心に δ 関数状に concentrate してゆく。従って $(\hat{w}_{\epsilon_n,0})$ は $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ で強収束部分列を持ち得ない。

2. **Effect of translation:**

   $|y_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$ となる任意の $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ をとる。すると $(\hat{w}_{1,y_n})$ は $I_\infty(u)$ の minimizing sequence であるが、$n \to \infty$ に従い $(\hat{w}_{1,y_n})$ は無限遠点に重心が逃げてゆく。従って $(\hat{w}_{1,y_n})$ は $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ で強収束部分列を持ち得ない。

3. **Effect of dilation-translation:**

   1, 2 を組み合わせた $(\hat{w}_{\epsilon_n,y_n})$ も $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ で強収束部分列を持ち得ない（$|y_n| \to \infty$ の場合は、(ϵ_n) は任意の非負値に収束する列でよい)。

このように $I_\infty(u)$ は dilation-translation invariance により、Palais-Smale 条件を満たさない。

しかし、$I_\infty(u)$ は完全に dilation-translation invariance であることを使うと、Palais-Smale 条件を満たさない minimizing sequence は上のいずれかのみであることがわかる [3]。よって、$I_\infty(u)$ は Palais-Smale 条件を満たさないものの、その破れ方は完全に分かっているといえる。

2.2 Original Problem

$I_\infty(u)$ と違い、$I_\lambda(u)$ は

- lower term λu の存在により、汎関数の dilation-invariance は破れ、
- 領域 Ω が $\mathbb{R}^N$ 全体でないことから汎関数の dilation-translation invariance は部分的に破れている。

従って、$I_\infty(u)$ の持っていたきれいな形の Palais-Smale 条件の破れが、$I_\lambda(u)$ では「変形して」残っていると考えられる。特に $I_\lambda(u)$ には存在した minimizer が、この「変形」を反映して、$I_\lambda(u)$ では存在しない可能性がある。

また、$I_\lambda(u)$ の対称性の破れは lower term λu の存在と、領域 Ω が $\mathbb{R}^N$ 全体でないことに原因があることを考えると、lower term の効果の大小及び領域の幾何的特性が I_λ の critical point の存在、非存在に影響することが予想される。

3 節ではこの予想が正しいことを、既存の結果をみることで確かめる。

3 Known Results

3.1 Ω が有界領域の場合

2 節で見た通り、I_λ の Palais-Smale 条件の破れ方は I_∞ のそれに比べて一般に複雑である。よって、$I_\infty(u)$ に minimizer が存在しても、$I_\lambda(u)$ に minimizer が存在するとは限らない。

実際、Ω が有界領域の場合には次の結果が知られている：

Proposition 3.1 (Nonexistence: Pohozaev [20])
Ω が星状領域ならば $-\Delta u = u|u|^{2^*-2}$ in Ω は非自明解を持たない。 □

この場合には、領域の持つ（近似的な）dilation-invariance によって minimizing sequence に concentration が起こるため、minimizer が存在しないと考えられる（2節の effrect of dilation にあたる）。

一方2節において、領域の幾何的特性または lower term の影響によって、Palais-Smale 列のコンパクト性が部分的に復活しうることを指摘した。

この点に関しては次の二つの結果が知られている（[1] も参照）:

Proposition 3.2 (Efect of geometry: Kazdan-Warner [15])
Ω が円環領域ならば $-\Delta u = u|u|^{2^*-2}$ in Ω は正値解を持つ。 □

Proposition 3.1 によれば球上では $-\Delta u = u|u|^{2^*-2}$ は解を持たないことに注意。円環領域では原点を中心とする（近似的な）dilation が破れているため、この方向には concentration が起こり得ず、解が存在すると考えられる。

Proposition 3.3 (Effect of lower term: Brezis-Nirenberg [9])
Ω を任意の有界領域とする。$0 < \lambda < \lambda_1$ ならば、$-\Delta u = \lambda u + u|u|^{2^*-2}$ in Ω は正値解を持つ。 □

Brezis-Nirenberg の結果を証明する上での鍵は次の事実である：

Lemma 3.1 ([9])
$S = \inf_{u \in M_\infty} I_\infty(u)$ （Sobolev の埋蔵 $H^1 \subset L^{2^*}$ の最良定数)、$S_\lambda = \inf_{u \in M} I_\lambda(u)$ とする。このとき $0 < \lambda < \lambda_1$ ならば $S_\lambda < S$ が成り立つ。 □

Proposition 3.3 の内容は、$\lambda = 0$ の場合には M の「無限遠点」にあった平衡点 (critical point at infinity) が、λ が正になって infimum が下がったこと（Lemma 3.1）により、M 内の点に「遷移した」と解釈できる。

本論の興味の一つは、このメカニズムが非有界領域の場合にも見られるかどうかを明らかにすることである（remark 5.1 を参照)。

3.2 Ω が非有界領域の場合

特に Ω が柱状領域の場合には、有界領域とほぼ同様の結果が次のように得られている：

Proposition 3.4 (Nonexistence: T. Hashimoto-Ôtani [13])
Ω_d を $\mathbb{R}^d$ の星状領域とする。このとき $-\Delta u = u|u|^{2^*-2}$ in $\Omega_d \times \mathbb{R}^{N-d}$ は正値解を持たない。 □

領域の幾何的特性の効果としては、次が成立する：

Proposition 3.5 (Effect of geometry: Ishiwata-Ôtani [14])
Ω_d を $\mathbb{R}^d$ の円環領域とする。このとき $-\Delta u = u|u|^{2^*-2}$ in $\Omega_d \times \mathbb{R}^{N-d}$ は正値解を持つ。
□

lower term の効果についてが、本論の主定理である。

他の非有界領域についてもさまざまな結果が知られている。特に内部問題と外部問題の間には興味深い双対性があることが最近明らかになった。このことについては T.Hashimoto-Ôtani [12] を参照。

4 Concentration-Compactness Principle at Infinity

4.1 Palais-Smale 条件の破れの特徴付け

2節で見たように、$I_\lambda(u)$ は一般に Palais-Smale 条件を満たさないため、minimizer の存在を証明するには、minimizing sequence のコンパクト性がどのような形で崩れるかを詳しく解析する必要がある。

この解析の方法として、大きく分けて concentration-compactness type の方法と、global compactness type の方法の2種がある。

4.1.1 concentration-compactness type argument

まず、Palais-Smale 列のコンパクト性の破れをどのように定量的に捉えるかを考える。

$I_\lambda(u)$ の minimizing sequence (u_n) をとると、明らかに $H_0^1(\Omega)$ の有界列になる。従って Sobolev の埋蔵より、$u_n \rightharpoonup u$ in $L^{2^*}(\Omega)$ となる $u \in H_0^1(\Omega)$ が存在する。よって L^{2^*}-norm の弱下半連続性により（部分列をとって）$1 = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{2^*} \geq \|u\|_{2^*}$ が成り立つ。

もし $u \in M$ すなわち $\|u\|_{2^*}^{2^*} = 1$ ならば u は求める minimizer であるが、$H^1 \subset L^{2^*}$ はコンパクトでないので、上のように $1 \geq \|u\|_{2^*}$ しか言えず、$u \in M$ は必ずしも成立しない。

このように考えると、minimizing sequence のコンパクト性の破れの定量的表現として、L^{2^*}-norm の損失に注目するという発想が生まれる。

そのために、(u_n) を、H_0^1 や L^{2^*} を含むより広い空間 $(C_0(\Omega))^* = \mathcal{M}(\Omega)$（$\Omega$ 上の Radon 測度全体）に埋め込み、そこでの u_n の挙動を調べることを考える。この一般的な挙動の詳細を与えるのが、P. L. Lions による concentration-compactness lemma I, II [16, 17, 18, 19] である（4.2 節を参照）。

4.1.2 global compactness type argument

一方、2節でみた通り、

- $I_\lambda(u)$ の Palais-Smale 条件の破れ方は、$I_\infty(u)$ の Palais-Smale 条件の破れ方が「変形したもの」であり、

- $I_\infty(u)$ の Palais-smale 条件を破る列は 1. dilation により concentrate していくもの、2. translation により無限遠点へ逃げていく（一般には複数個の）「山」に分解していくもの、3. 両者の複合 の３種に限られる

ことがわかっている。よって、Palais-Smale 列のコンパクト性の崩れ方を調べるのに、concentration-compactness method のように列をより広い空間に埋め込むのでなく、汎関数の dilation, translation に関する特性を詳しく解析することにより、(u_n) の振舞いを調べるという立場もある。

この立場で議論しているものには Benci-Cerami [2], Struwe [22], Brezis-Coron [10] などがある。

4.1.3 どちらをとるか？

２つの argument は、Palais-Smale 列のコンパクト性の崩れ方を解析するという共通の目的を持つが、背景となる考え方は上に見たように異なる。各々の argument の長所、短所は次のようにまとめられる。

concentration-copactness type argument は一般論なので、Palais-Smale 列に限らず、一般の $D_0^{1,2}$ の有界列について応用できる。しかし一般的な分、得られる情報は global compactness type argument に比べ少ない。特に変分問題では、実質的に minimizing problem にしか適用できないという難点がある。

一方 global compactness type argument では、汎関数の微妙な特性をフルに利用するので、汎関数の Palais-Smale 列についてしか議論できず、議論自体も concentration-compactness type argument に比べはるかに複雑になる。

ここでの問題 (VP) に対しては、

- コンパクト性の破れの原因が領域の非有界性と指数の臨界性の２つであり、状況が複雑なため simple な議論が望まれること
- minimizing problem であること

の２つの理由により、concentration-compactness type argument を適用する。

4.2 Concentration Compactness Principle at Infinity

２節の解析によると、Palais-Smale 列のコンパクト性の破れ方には、

1. **concentration:**

   dilation の効果により、列が δ 関数状に concentration する。

2. **leaking out:**

   translation の効果により、列が、台が無限遠点に逃げてゆく複数個の「山」に分解する。

3. **combination:**

   両者のコンビネーション。

の最低で3種あることがわかっている。このうち、concentration の効果を記述するのが P. L. Lions による concentration-compactness lemma II である：

Lemma 4.1 (concentration-compactness lemma II [18, 19])

$(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ を $u_n \rightharpoonup u$ weakly in $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ なる列とする。このとき (u_n) の部分列について次が成り立つ：

たかだか可算個の点からなる特異点の集合 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^N$、$\mathcal{S}$ 上の positive weights $(\nu_{x_j}, \mu_{x_j})_{x_j \in \mathcal{S}}$, nonnegative Radon measures ν, μ があって次を満たす：

1. $|u_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu \quad$ weakly* in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$,
2. $|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \mu \quad$ weakly* in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$,
3. $\nu = |u|^{2^*} + \sum_{x_j \in \mathcal{S}} \nu_{x_j} \delta_{x_j}$,
4. $\mu \geq |\nabla u|^2 + \sum_{x_j \in \mathcal{S}} \mu_{x_j} \delta_{x_j}$,
5. $S \nu_{x_j}^{\frac{2}{2^*}} \leq \mu_{x_j}$. $\quad \square$

一方 leaking out の効果は concentration-compactness lemma I により記述される：

Lemma 4.2 (concentration-compactness lemma I [16, 17])

(μ_n) を、$\mathbb{R}^N$ 上の nonnegative probability measure の列とする。このとき (μ_n) の部分列に対し次のいずれかが成り立つ：

1. **compactness:** 点列 $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ があって、任意の ϵ に対しある半径 R があって $\int_{B(x_n;R)} d\mu_n \geq 1 - \epsilon$ が成立する。
2. **vanishing:** 任意の $R > 0$ に対し $\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{B(x;R)} d\mu_n \right) = 0$ が成立する。
3. **dichotomy:** $0 < \lambda < 1$ なる λ があって、任意の ϵ に対し半径 R と 点列 $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ があって次を満たす：

   任意の $R' > R$ に対し nonnegative probability measures μ_n^1, μ_n^2 があって、

   $0 \leq \mu_n^1 + \mu_n^2 \leq 1$,

   $supp(\mu_n^1) \subset B(x_n; R)$, $supp(\mu_n^2) \subset \mathbb{R}^N \setminus B(x_n; R)$,

   $\limsup_{n\to\infty} \left(|\lambda - \int_{\mathbb{R}^N} d\mu_n^1| + |(1-\lambda) - \int_{\mathbb{R}^N} d\mu_n^2| \right) \leq \epsilon. \quad \square$

以下それぞれ CCL II, CCL I と呼ぶ。

CCL I によれば、領域の非有界性によるコンパクト性の破れは、列が、無限遠に逃げてゆく複数個の「山」に分解すること (dichotomy) の他に、$\mathbb{R}^N$ 全体で関数が 0 に潰れること (vanishing) によっても起こることが分かる。

有界領域上の (BN) は今まで多く扱われてきたが、この場合は CCL II のみ考慮すればよい。しかし我々の場合は非有界領域上で考えるので、CCL I,II の双方を使う必要がある。

ところが CCL I は確率測度の振舞いの分類の形で、CCL II は L^{2^*}-density の弱収束極限の評価の形で述べられており、同時に扱うのに適している定式化とは言い難い。

最近この難点を克服した、両者の統合バージョンである concentration-compactness principle at infinity が開発された。これと S_λ の定義を組み合わせると、次が成り立つ：

Proposition 4.1 (Concentration-Compactness Principle at Infinity [11, 4])

$(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ を $u_n \rightharpoonup u$ weakly in $H_0^1(\Omega)$ となる列とする。このとき (u_n) の部分列について次が成り立つ：

たかだか可算個の点からなる特異点の集合 $\mathcal{S} \subset \bar{\Omega}$、$\mathcal{S}$ 上の positive weights $(\nu_{x_j}, \mu_{x_j})_{x_j \in \mathcal{S}}$, nonnegative numbers ν_∞, μ_∞ があって次を満たす：

1. $\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{2^*}^{2^*} = \|u\|_{2^*}^{2^*} + \sum_{x_j \in \mathcal{S}} \nu_{x_j} + \nu_\infty$,
2. $\lim_{n\to\infty} \left(\|\nabla u_n\|_2^2 - \lambda \|u_n\|_2^2\right) \geq \left(\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2\right) + \sum_{x_j \in \mathcal{S}} \mu_{x_j} + \mu_\infty^\lambda$,
3. $\nu_{x_j} = \lim_{\epsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega \cap B(x_j;\epsilon)} |u_n|^{2^*} dx, \quad \mu_{x_j} = \lim_{\epsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega \cap B(x_j;\epsilon)} |\nabla u_n|^2 dx$,
4. $\nu_\infty = \lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega \cap \{|x|>R\}} |u_n|^{2^*} dx, \quad \mu_\infty^\lambda = \lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega \cap \{|x|>R\}} (|\nabla u_n|^2 - \lambda |u_n|^2) dx$,
5. $S \nu_{x_j}^{\frac{2}{2^*}} \leq \mu_{x_j}, \quad S_\lambda \nu_\infty^{\frac{2}{2^*}} \leq \mu_\infty \quad \forall x_j \in \mathcal{S}$. □

Proposition 4.1 は、コンパクト性の破れの表現として L^{2^*}-norm の損失に注目するという立場に適した形になっている。実際、norm の損失は 1. を見れば、local concentration ν_{x_j} と leaking out ν_∞ のみで起こることは一目瞭然である。

5 節では Proposition 4.1 を用いた主定理の証明の概略を見ることにする。

5 Sketch of Proof of the Main Theorem

主定理の証明の概略を述べる。本節を通じ、記号の簡略化のため $N - d = 1$ とする。次の手順で証明は進む：

Step 1: concentration ν_{x_j}, leaking out ν_∞ が出ないと思われる「よい」minimizing sequence を構成する。

Step 2: concentration ν_{x_j}, leaking out ν_∞ があった場合、これらはあるアプリオリ評価を満たす。その評価の導出。

Step 3: Step 1 で構成した minimizing sequence が実際に concentration ν_{x_j}, leaking out ν_∞ を持たないことを、Step 2 で導いた評価を用いて示す。

Step 1: construction of a good minimizing sequence

$(u_n) \subset M = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\|_{2^*}^{2^*} = 1\}$ を任意の minimizing sequence とする。すなわち、$I_\lambda(u_n) \to S_\lambda = \inf_{u \in M} I_\lambda(u)$ とする。

まず leaking out を持たないようにするため、(u_n) を次のように normalize して新たな minimizig sequence (v_n) を作る：

$\Omega = \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \Omega_m, \quad \Omega_n = \{x = (x_1, y) \in \Omega_d \times \mathbb{R} \mid m < |y| \le m+1\}$ のように Ω をスライス分割する。すると任意の u_n に対し、$\int_{\Omega_m} |u_n|^{2^*}$ が最大値をとるスライス Ω_{M_n} がある。$\Omega_{M_n} = \Omega_0 + y_{M_n}$ として、(u_n) から (v_n) を、

$$v_n(\cdot) = S_\lambda^{\frac{1}{2^*-1}} u_n(\cdot - y_{M_n})$$

で定義する。すると、次が成立する。

Lemma 5.1 (v_n) は汎関数 $J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx$ の *Palais-Smale* 列である。 □

また $I_\lambda(u)$ の translation-invariance と、Ω_0 上で v_n の L^{2^*}-norm が常に最大値をとることから、次を得る。

Lemma 5.2 (v_n) は次を満たす。

(1) $\|v_n\|_{2^*}^{2^*} = S_\lambda^{\frac{1}{2^*-1}} \quad \forall n.$

(2) $\exists \delta > 0 \ s.t. \int_{\Omega_0} |v_n|^{2^*} dx \ge \delta \quad \forall n.$

(v_n) に Proposition 4.1 を適用する。すると、Lemma 5.2 (1) とあわせて、次を得る：

たかだか可算個の点からなる特異点の集合 $\mathcal{S} \subset \bar{\Omega}$、$\mathcal{S}$ 上の positive weights $(\nu_{x_j}, \mu_{x_j})_{x_j \in \mathcal{S}}$, nonnegative numbers (ν_∞, μ_∞) および $v \in H_0^1(\Omega)$ があって次を満たす：

$$v_n \rightharpoonup v \text{ weakly in } H_0^1(\Omega) \tag{1}$$

$$S_\lambda^{\frac{2^*}{2^*-2}} = \|v\|_{2^*}^{2^*} + \sum_{x_j \in \mathcal{S}} \nu_{x_j} + \nu_\infty \tag{2}$$

$$\nu_{x_j} = \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega \cap B(x_j;\epsilon)} |v_n|^{2^*} dx, \quad \mu_{x_j} = \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega \cap B(x_j;\epsilon)} |\nabla v_n|^2 dx \tag{3}$$

$$\nu_\infty = \lim_{R \to \infty} \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega \cap \{|x|>R\}} |v_n|^{2^*} dx, \quad \mu_\infty^\lambda = \lim_{R \to \infty} \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega \cap \{|x|>R\}} (|\nabla v_n|^2 - \lambda |v_n|^2) dx \tag{4}$$

$$S \nu_{x_j}^{\frac{2}{2^*}} \le \mu_{x_j}, \quad S_\lambda \nu_\infty^{\frac{2}{2^*}} \le \mu_\infty^\lambda \quad \forall x_j \in \mathcal{S} \tag{5}$$

Step 2. Estimates for bubbles

一方、concentration, leaking があった場合には次の評価が成立する。

Lemma 5.3 ν_{x_j}, ν_∞ は以下を満たす。

(1) $\nu_{x_j} \neq 0 \Rightarrow \nu_{x_j} \geq S^{\frac{2^*}{2^*-2}}$,

(2) $\nu_\infty \neq 0 \Rightarrow \nu_\infty \geq S_\lambda^{\frac{2^*}{2^*-2}}$ □

proof.

$\phi^\epsilon_{x_j} \in C_0^\infty(\Omega)$ を、

$$supp\ \phi^\epsilon_{x_j} \subset B(x_j;\epsilon),\ \phi^\epsilon_{x_j} = 1 \text{ in } B(x_j;\frac{\epsilon}{2}),\ 0 \leq \phi^\epsilon_{x_j} \leq 1$$

なる x_j への concentration function,

$\phi^R_\infty \in C^\infty(\Omega)$ を、

$$supp\ \phi^R_\infty \subset \Omega \setminus B(0;R),\ \phi^R_\infty = 1 \text{ in } \Omega \setminus B(0;R+1),\ 0 \leq \phi^R_\infty \leq 1$$

なる無限遠点への concentration function とする。Lemma 5.1 より、

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}(dJ)_{v_n}(v_n\phi^\epsilon_{x_j}) = 0 \tag{6}$$

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}(dJ)_{v_n}(v_n\phi^R_\infty) = 0 \tag{7}$$

を得る。これと式 (3),(4) より

$$\nu_{x_j} = \mu_{x_j},\ \nu_\infty = \mu_\infty \tag{8}$$

が従う。式 (5) とあわせて主張を得る。 □

Step 3. Exclusion of concentration and leaking

以上の準備のもとで、(v_n) が concentration, leaking を持たないことが次のようにしてわかる。

- **concentration を持たないこと：**

  まず式 (2) より $\nu_{x_j} \leq S_\lambda^{\frac{2^*}{2^*-2}}$ が成立する。これと Lemma 3.1 ($S > S_\lambda$) より、$\nu_{x_j} \leq S^{\frac{2^*}{2^*-2}}$ が従う。よって Lemma 5.3 (1) の対偶より $\nu_{x_j} = 0$ を得る。すなわち $\mathcal{S} = \phi$ として一般性を失わない。

- **leaking を持たないこと：**

  $\mathcal{S} = \phi$ と Lemma 4.1 (1), (3) より、$\int_{\Omega_0} |v_n|^{2^*} dx \to \int_{\Omega_0} |v|^{2^*} dx$ が従う。これと Lemma 5.2 (2) をあわせて $v \neq 0$ が成り立つ。

  よって式 (2) 及び $\mathcal{S} = \phi$ とあわせて $\nu_\infty < S_\lambda^{\frac{2^*}{2^*-2}}$ が成立。これと Lemma 5.3 (2) の対偶より、$\nu_\infty = 0$ を得る。

以上より $v_n \rightharpoonup v$ weakly in $L^{2^*}(\Omega)$, $\|v_n\|_{2^*}^{2^*} \to \|v\|_{2^*}^{2^*} = S_\lambda^{\frac{2^*}{2^*-2}}$ を得た。よって L^{2^*} の一様凸性より $v_n \to v$ strongly in $L^{2^*}(\Omega)$ を得る。

従って $u = \dfrac{1}{S_\lambda^{\frac{1}{2^*-2}}} v$ とおけば、この u が求める minimizer である。 □

Remark 5.1 上の解析でわかる通り、一般に $\nu_\infty \geq S_\lambda^{\frac{2^*}{2^*-2}}$ であるので、lower term の効果によって解が存在した Brezis-Nirenberg のメカニズムは leaking out ν_∞ の exclusion には働かないことがわかる。

参考文献

[1] Bahri, A., Colon, J. M., On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: the effect of the topology of the domain. *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 253-294.

[2] Benci, V., Cerami, G., Positive solutions of some nonlinear elliptic problems in exterior domains. *Arch. Rat. Mech. Analysis* **99** (1987), 283-300.

[3] Benci, V., Cerami, G., Existence of positive solutions of the equation $-\Delta u + a(x)u = u^{\frac{N+2}{N-2}}$ in $\mathbb{R}^N$. *J. Funct. Analysis* **88** (1990), 90-117.

[4] Ben-Naoum, A.K., Troestler, C., Willem, M., Extrema problem with critical Sobolev exponents on unbounded domains. *Nonlinear Analysis, T. M. A.* Vol. **26**, No. 4, (1996), 823-833.

[5] Berestycki, H., Lions, P.L., Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state. *Arch. Rat. Mech. Analysis* **82** (1983), 313-346.

[6] Berestycki, H., Lions, P.L., Nonlinear scalar field equations. II. Existence of infinitely many solutions. *Arch. Rat. Mech. Analysis* **82** (1983), 347-376.

[7] Brezis, H., Some variational problems with lack of compactness. *Proc. Sympos. in Pure Math.* Vol. **45** (1986), 165-201.

[8] BREZIS, H., Elliptic equations with limitting Sobolev exponents–the impact of topology. *Comm. Pure Appl. Math.* Vol. **39** (1986), S17-S39.

[9] BREZIS, H., NIREMBERG, L., Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math.* Vol. **36** (1983), 437-477.

[10] BREZIS, H., CORON, J. M., Convergence of solutions of H-systems or how to blow bubbles. *Arch. Rat. Mech. Analysis.* **89** (1985), 21-56.

[11] CHABROWSKI, J., Concentration-compactness principle at infinity and semilinear elliptic equations involving critical and subcritical Sobolev exponent. *Calc. Var.* **3** (1995), 493-512.

[12] HASHIMOTO, T., ÔTANI, M., Nonexistence of weak solutions of nonlinear elliptic equations in exterior domains. *Houston J. Math.* Vol **23**, No. 2 (1997), 267-290.

[13] HASHIMOTO, T., ÔTANI, M., Nonexistence of positive solutions for some quasilinear elliptic equations in strip-like domains. *to appear in Discrete and continuous Dynamical systems.*

[14] ISHIWATA, M., ÔTANI, M. Positive solutions for semilinear elliptic equations in unbounded domains involving critical Sobolev exponent. 日本数学会１９９７年度春季総会関数方程式分科会アブストラクト.

[15] KAZDAN, J., WARNER, F., Remarks on some quasilinear elliptic equations. *Comm. Pure Appl. Math.* Vol. **28** (1975), 567-597.

[16] LIONS, P.L., The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The locally compact case. Part I. *Ann. Inst. Henry Poincaré, Analyse Nonlinéaire* **1** (1984), 109-145.

[17] LIONS, P.L., The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The locally compact case. Part II. *Ann. Inst. Henry Poincaré, Analyse Nonlinéaire* **1** (1984), 223-283.

[18] LIONS, P.L., The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The limit case. Part I. *Rev. Mat. Iberoamericano* **1.1.** (1985), 145-201.

[19] LIONS, P.L., The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The limit case. Part II. *Rev. Mat. Iberoamericano* **1.2.** (1985), 45-121.

[20] POHOZAEV, S., Eigenfunctions of the equation $\Delta u + f(u) = 0$. *Soviet Math. Doklady* **6** (1965), 1408-1411.

[21] RABINOWITZ, P., Minimax methods in critical point theory with applications to differential equatios. *CBMS* **65** (1986), Amer. Math. Soc., Providence.

[22] STRUWE, M., A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limitting nonlinearities. *Math. Z.* **187** (1984), 511-517.

[23] TALENTI, G., Best constant in Sobolev inequarity. *Ann. Mat. Pura Appl.* Vol. **110** (1976), 353-372.